

階梯狀截面之表面起伏型光柵繞射之研究

李忠昫^{*} 李清和^{**}

摘要

本文旨在應用一實用之傳輸函數法來分析平面波入射於斜邊階梯狀截面對稱與非對稱之表面起伏型光柵所形成之繞射現象。由此法可得以積分式表示之繞射波複振幅 (complex amplitude)。本研究所求得各階繞射效率，對稱截面之光柵其高階繞射效率減小之速度比非對稱者快。光柵繞射效率則隨著光柵厚度對光柵週期之比值變小而變大。

*工業教育研究所 研究生

**工業教育學系 副教授

壹、前言

週期型結構的光柵在工程應用上是極為重要且廣泛的。它可以用在光束的耦合、分離、調變雷射光束、聲波的產生、同調與非同調的轉換器、影像放大、類比對數位的轉換、積體光學元件、聲-光調變裝置、全像光學元件和其它許多領域。

有關光柵繞射理論的探討，過去已有許多的文獻被提出來。例如：以電磁波理論為基礎的精確耦合波理論 (rigorous coupled-wave theory)；用以精確解析任意形狀但均勻之光柵繞射現象之積分方程法 [1]-[3]；應用第零階和第壹階而忽略高階項的雙波模態理論 (two-wave modal theory) [4]；由 Raman 和 Nath 兩人提出，應用多重波 - 耦合波理論 (multi-couple wave theory) 的 Raman-Nath theory [5]-[8]。

本研究之目的在應用振幅傳輸函數法 (amplitude transmittance) 來解析薄型斜邊階梯狀截面之表面起伏型週期性光柵繞射情形。解析的例子包括斜邊對稱結構及斜邊非對稱結構二種。振幅傳輸函數法和 Raman-Nath 繞射理論有著緊密的關係，在假設光柵為微小調變 (small modulation) 之前提下，前者之解即與 Raman-Nath 繞射方程式之解相同。

使用傳輸函數法解析薄型光柵的優點在於只須應用傅立業級數和簡單的數學方法，可避免直接解複雜的系統支配方程式 (governing equation)。雖然，傳輸函數法是一種由多重耦合波理論和 Raman-Nath theory 發展而來的近似解法。但在合理的精確度要求下，傳輸函數法提供簡單、方便、快速的優點。

本文之第二部份是以傳輸函數法解系統支配方程式；應用傳輸函數法解析各型光柵的例子將在第三部份探討。在文末之討論中，我們將以本研究的結果和其它現有文獻做一比較，並提出進一步研究時之建議。

貳、理論探討

一般在研究光柵之繞射時，通常會將它們分成兩種；一種是厚型的光柵，一種是薄型的光柵，而厚薄尺寸則相對於工作波長而言。判斷的方法是由 Q' 因子來決定的，其定義如下 [9]：

$$Q' = \frac{2\pi\lambda d}{n\Lambda^2 \cos \theta} \quad (1)$$

λ : 入射平面波的自由空間波長

d : 光柵的厚度

n : 光柵之平均折射率

Λ : 光柵週期

當 $Q' > 1$ 時，定義成厚型光柵，或稱 Bragg 光柵； $Q' < 1$ 時則為薄型光柵，又稱 Raman-Nath 光柵。

對任意光柵結構而言，其折射率的週期空間調變可以用傅立業級數表示如 (2) 式所示 [11]

$$\Delta n = \sum_{h=1}^{\infty} (n_{ch} \cos hKx + n_{sh} \sin hKx) \quad (2)$$

上式中 n_{ch} , n_{sh} 分別是第 h 項的餘弦項和正弦項的振幅， $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$ 。總折射率 $n(x) = n_0 + \Delta n$ 。此任意光柵結構之系統支配方程式，可用耦合波理論導出的系統支配方程式表示如下式 [11]：

$$\frac{\partial S_i}{\partial z} + j \left[\frac{i(m-1)}{2} \right] Q' S_i + \gamma \sum_{h=1}^{\infty} (f_h S_{i-h} - f_h^* S_{i+h}) = 0 \quad (3)$$

$S_i = S_i(z)$: 第 i 階繞射平面波的複數振幅

m : Bragg order ($m = \frac{2n_0 \Lambda \sin \theta}{\lambda}$)

n_0 : 光柵之平均折射率

θ : 入射至光柵介質內的角度

γ : 基本光柵的歸一化振幅 [$\gamma = \frac{\pi d n_1}{\lambda \cos \theta}$, n_1 為基本光柵的振幅，

$$n_1 = (n_{1c}^2 + n_{1s}^2)^{\frac{1}{2}}$$

f_h : 描述光柵形狀之函數 ($f_h = f_{sh} + f_{ch}$, $f_{ch} = \frac{n_{ch}}{n_1}$, $f_{sh} = \frac{n_{sh}}{n_1}$)

當 $Q' \approx 0$ 時，(3) 式可以化簡如下：

$$\frac{\partial S_i}{\partial z} + \gamma \sum_{h=1}^{\infty} (f_h S_{i-h} - f_h^* S_{i+h}) = 0 \quad (4)$$

上式即薄型光柵的差微分方程式 (difference-differential equation)，我們可以應用傳輸函數法解式中的振幅 S_i ，並從而計算輸出波各階之繞射效率。

在應用傳輸函數法分析光柵繞射效率時，我們假設輸入平面波之振幅為一，而輸出則可表示為輸入波和光柵傳輸函數的積。一個薄型光柵的傳輸函數可以寫成下式 [11]

$$T(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-j2\pi z d \Delta n}{\lambda \cos \theta}\right] \quad (5)$$

其中 Δn 由 (2) 式來決定。在 (5) 式中，我們略去相位因子 $\exp\left(\frac{-j2\pi n_0 z d}{\lambda \cos \theta}\right)$

，因為它無關繞射效率之計算。進一步將傳輸函數寫成傅立業級數展開的型式，則

$$T(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} S_i(z) \exp(jiKx) \quad (6)$$

其中，

$$S_i(z) = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} \exp\left[j \frac{2\pi n_1 d}{\lambda \cos \theta} f(Kx)\right] \exp(-jiKx) dx \quad (7)$$

式中令 $\Delta n = n_1 f(Kx)$ ， $f(Kx)$ 為光柵的形狀函數。由 (6) 式可看出，當輸入平面波之振幅為一時，傳輸函數之傅立業級數表示式的係數實即為輸出平面波各階的振幅。

本文將以前述之傳輸函數法來解析薄型週期性光柵之各階繞射效率。繞射效率定義如下：

$$\eta_i = S_i \cdot S_i^* \quad (8)$$

此處 S_i^* 為振幅 S_i 之共軛複數。基於能量守恆，輸出之各階繞射效率總和必須為一，亦即

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \eta_i = 1 \quad (9)$$

下節中將以數例來驗證上述理論解析之實用性，並以各階效率作圖予以說明。

參、實例

本研究使用之傳輸函數法，其適用範圍包括對稱與非對稱型光柵，在表一中我們列出了兩種光柵的形狀表示式及其對應之傳輸函數。本文中僅就斜邊對稱型光柵之輸出各階振幅公式推導加以詳細討論，其餘形狀者則可比照。

表一、本研究解析之二種光柵之形狀表示式及對應之傳輸函數

	斜邊對稱	斜邊非對稱
光柵圖形		
$\Omega(x)$	$\Omega_1(x)$ L1: 0 $A_1 \leq x \leq A_0$ L2: $C_2(x - A_2) + d_1$ $A_2 \leq x \leq A_1$ L3: d_1 $A_3 \leq x \leq A_2$ L4: $C_1(x - A_4) + d_2$ $A_4 \leq x \leq A_3$ L5: d_2 $0 \leq x \leq A_4$ L6: d_2 $-A_4 \leq x \leq 0$ L7: $C_3(x + A_4) + d_2$ $-A_3 \leq x \leq -A_2$ L8: d_1 $-A_2 \leq x \leq -A_4$ L9: $C_4(x + A_2) + d_1$ $-A_1 \leq x \leq -A_0$ L10: 0 $-A_0 \leq x \leq -A_1$	$\Omega_2(x)$ L1: 0 $A_1 \leq x \leq A_0$ L2: $C_2(x - A_2) + d_1$ $A_2 \leq x \leq A_1$ L3: d_1 $A_3 \leq x \leq A_2$ L4: $C_1(x - A_4) + d_2$ $A_4 \leq x \leq A_3$ L5: d_2 $0 \leq x \leq A_4$
	$\Phi(x)$	$k \Delta n \Omega_1(x)$
$t(x)$	$\exp[-jk \Delta n \Omega_1(x)]$	$\exp[-jk \Delta n \Omega_2(x)]$

如表一左圖之斜邊階梯狀截面對稱型光柵，其結構之傳輸函數可表如下式：

$$T(x) = t(x) * \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(x - \ell\Lambda)$$

T(x) 是一個週期函數，可將傳輸函數寫成傅立業級數展開的型式

$$T(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} S_i \exp(jiKx)$$

其中，輸出平面波的振幅為

$$S_i = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\frac{\Lambda}{2}}^{\frac{\Lambda}{2}} \exp[-jk\Delta n] \cdot \exp[-jiKx] dx$$

表一左圖之光柵結構中，其形狀函數 $\Omega_1(x)$ 。其中， $C_1 = \frac{d_1 - d_2}{A_3 - A_4}$ ，

$$C_2 = \frac{-d_1}{A_1 - A_2}, C_3 = \frac{d_2 - d_1}{A_3 - A_4} = -C_1, C_4 = \frac{d_1}{A_1 - A_2} = -C_2$$

應用傳輸函數法，其相位可以寫為 $\phi(x) = k\Delta n \Omega_1(x)$ ，單一週期之光柵傳輸函數為 $t(x) = \exp[-j\phi(x)]$ [12]。全部光柵結構的傳輸函數可用摺積 (convolution integral) 的方式表示成下式：

$$T(x) = t(x) * \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(x - \ell\Lambda)$$

因為 T(x) 是一個週期函數，它可以表示成傅立業級數的複數型式：

$$T(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} S_i \exp(jiKx)$$

假設輸入平面波之振幅為一，則其輸出波的振幅如下式：

$$S_i = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\Omega(x)] \exp(-jiKx) dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Lambda} \int_{-A_0}^{A_0} \exp[\Omega(x)] \exp(-jiKx) dx \\ &= \frac{1}{\Lambda} \left\{ \int_{A_1}^{A_0} \exp(0) \exp(-jiKx) dx \right. \\ &\quad + \int_{A_2}^{A_1} \exp[-jk\Delta n [C_2(x - A_2) + d_1]] \exp(-jiKx) dx \\ &\quad + \int_{A_3}^{A_2} \exp(-jk\Delta n d_1) \exp(-jiKx) dx \\ &\quad + \int_{A_4}^{A_3} \exp[-jk\Delta n [C_1(x - A_4) + d_2]] \exp(-jiKx) dx \\ &\quad + \int_0^{A_4} \exp(-jk\Delta n d_2) \exp(-jiKx) dx \\ &\quad + \int_{-A_4}^0 \exp(-jk\Delta n d_2) \exp(-jiKx) dx \\ &\quad + \int_{-A_3}^{-A_4} \exp[-jk\Delta n [C_3(x + A_4) + d_2]] \exp(-jiKx) dx \\ &\quad + \int_{-A_2}^{-A_3} \exp(-jk\Delta n d_1) \exp(-jiKx) dx \\ &\quad + \left. \int_{-A_1}^{-A_2} \exp[-jk\Delta n [C_4(x + A_2) + d_1]] \exp(-jiKx) dx \right\} \\ &= \frac{j[e^{-jiKA_0} - e^{-jiKA_1}]}{iK} + \frac{j e^{jk\Delta n (C_2 A_2 - d_1)} [e^{-j(k\Delta n C_2 + iK)A_1} - e^{-j(k\Delta n C_1 + iK)A_2}]}{iK + k\Delta n C_2} \\ &\quad + \frac{j e^{jk\Delta n (-d_1)} [e^{-jiKA_2} - e^{-jiKA_3}]}{iK} + \frac{j e^{jk\Delta n (C_1 A_4 - d_2)} [e^{-j(k\Delta n C_2 + iK)A_3} - e^{-j(k\Delta n C_1 + iK)A_4}]}{iK + k\Delta n C_1} \\ &\quad + \frac{j e^{jk\Delta n (-d_2)} [e^{-jiKA_4} - 1]}{iK} + \frac{j e^{jk\Delta n (-d_2)} [1 - e^{-jiK(-A_4)}]}{iK} \\ &\quad + \frac{j e^{jk\Delta n (-C_3 A_4 - d_2)} [e^{-j(k\Delta n C_3 + iK)(-A_4)} - e^{-j(k\Delta n C_3 + iK)(-A_3)}]}{iK + k\Delta n C_3} + \frac{j e^{jk\Delta n (-d_1)} [e^{-jiK(-A_3)} - e^{-jiK(-A_2)}]}{iK} \\ &\quad + \frac{j e^{jk\Delta n (-C_4 A_2 - d_1)} [e^{-j(k\Delta n C_4 + iK)(-A_2)} - e^{-j(k\Delta n C_4 + iK)(-A_1)}]}{iK + k\Delta n C_4} + \frac{j [e^{-jiK(-A_1)} - e^{-jiK(-A_0)}]}{iK} \\ &= \frac{j [e^{-jiKA_0} - e^{-jiKA_1}]}{iK} + \frac{j e^{jk\Delta n (C_2 A_2 - d_1)} [e^{-j(k\Delta n C_2 + iK)A_1} - e^{-j(k\Delta n C_1 + iK)A_2}]}{iK + k\Delta n C_2} \end{aligned}$$

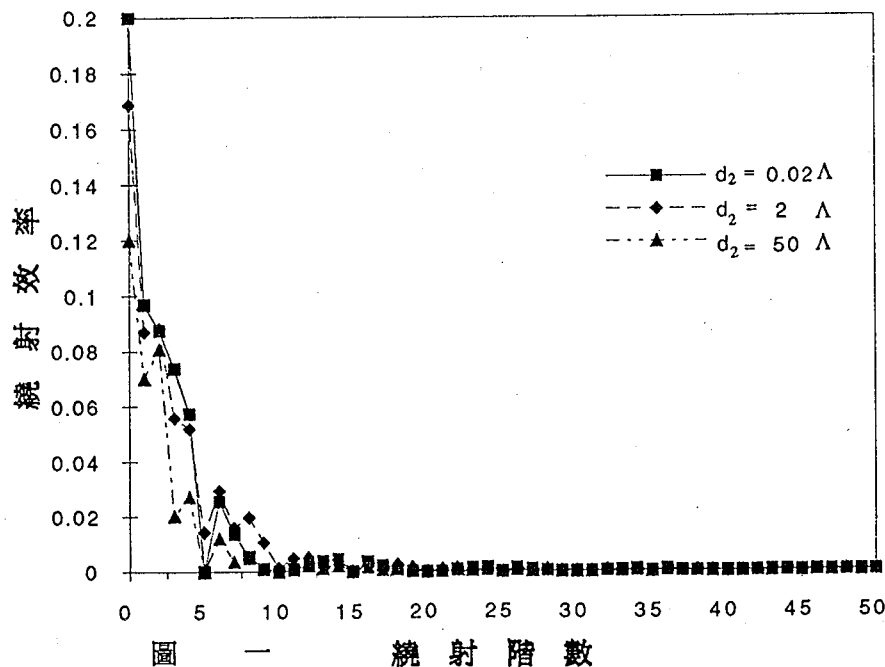
$$\begin{aligned}
& + \frac{j e^{jk\Delta n(-d_1)} [e^{-jiKA_2} - e^{-jiKA_3}] + j e^{jk\Delta n(C_1 A_4 - d_2)} [e^{-j(k\Delta n C_2 + iK)A_3} - e^{-j(k\Delta n C_1 + iK)A_4}]}{iK} \\
& + \frac{j e^{jk\Delta n(-d_2)} [e^{-jiKA_4} - 1] + j e^{jk\Delta n(-d_2)} [1 - e^{-jiK(-A_4)}]}{iK} \\
& + \frac{j e^{jk\Delta n(C_1 A_4 - d_2)} [e^{j(k\Delta n C_1 + iK)(A_4)} - e^{j(-k\Delta n C_1 + iK)(A_3)}] + j e^{jk\Delta n(-d_1)} [e^{-jiK(-A_3)} - e^{-jiK(-A_2)}]}{iK - k\Delta n C_1} \\
& + \frac{j e^{jk\Delta n(C_2 A_2 - d_1)} [e^{j(-k\Delta n C_2 + iK)(A_2)} - e^{j(-k\Delta n C_2 + iK)(A_1)}] + j [e^{-jiK(-A_1)} - e^{-jiK(-A_0)}]}{iK - k\Delta n C_2}
\end{aligned}$$

本文中所解析的兩個薄形光柵例子，其入射光的波長設為 .6328 μm，光柵的週期大小為二倍的入射光波長，光柵內部折射率為 1.71，而其周圍部分之折射率則為 1.47。利用上面之 S_i 式及 Fortran 程式，我們可輕易算出各階繞射效率 η_i 。以 d_1, d_2 為厚度參數，光柵之形狀參數 A_0-A_4 ，其大小分別表示如下

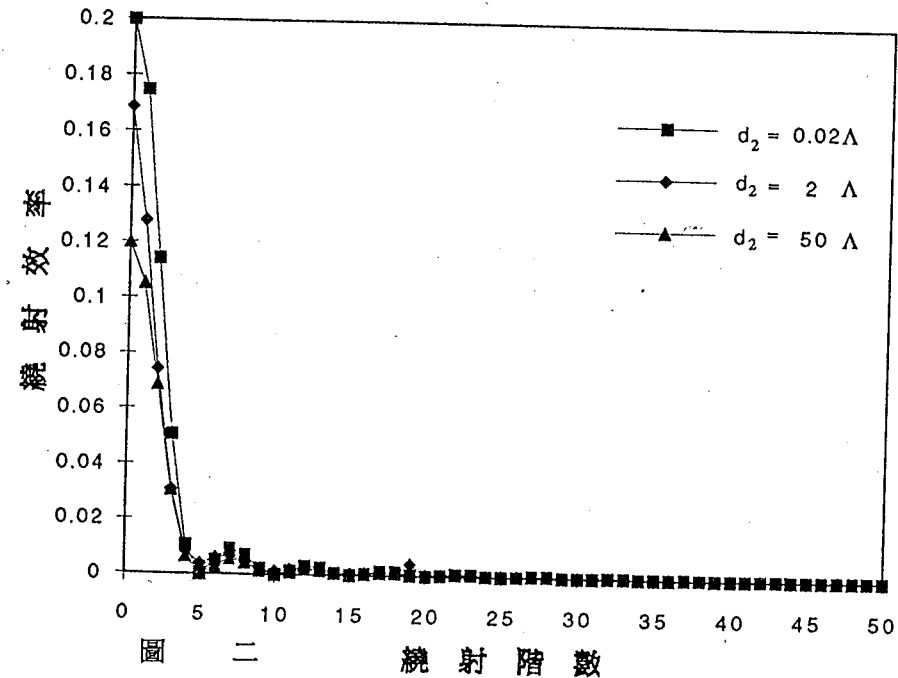
$$d_1 = \frac{1}{2} d_2, A_0 = \frac{\Lambda}{2}, A_1 = \frac{4}{5} A_0, A_2 = \frac{3}{5} A_0, A_3 = \frac{2}{5} A_0, A_4 = \frac{1}{5} A_0$$

根據 (1) 式，若為薄形光柵結構時，則 d_2 的值必須限制在 25 Λ 以下。

斜邊對稱型



斜邊非對稱型



數值計算結果示如圖一及圖二，圖一所示為斜邊對稱型結構的繞射效率 - 繞射階數圖。圖二則是斜邊非對稱型結構的繞射效率 - 繞射階數圖。下節中將對此所得之結果加以分析討論。

肆、結論

由圖一可知，斜邊對稱型結構的最大繞射效率通常發生在第零階，且最大繞射效率會隨著光柵厚度的減小而逐漸增大。繞射效率的高階項則逐漸振盪趨近於零。

比較圖一與圖二發現最大繞射效率幾乎相同，對稱型結構的繞射效率在最初幾階的振盪極大，非對稱型結構之圖型則較平滑。對稱型結構在計算至第五十階時的累積繞射效率和則明顯較非對稱型太多。

本研究的兩種一次函數型光柵結構以傳輸函數法解析時，所得之繞射振幅積分表示式可以直接算出，再經與共軛複數相乘後，即得繞射效率。若為二次函數型光柵結構，如圓形、橢圓、雙曲線、拋物線截面之週期型光柵，則以傳輸函數法解析時，繞射振幅積分表示式常應用 Stationary Phase 法來求出其近似值 [13]。二次函數型光柵結

構之最大繞射效率值約在 0.1 以下 [14]-[15]，正弦型光柵結構在 ± 1 階之間的最大繞射效率可達 33.8%，方形結構光柵的最大繞射效率可達 40.5% [11]。

本研究之結果可提供吾人對斜邊階梯狀表面起伏型週期光柵之繞射現象有一深入之瞭解，並可作為設計其它新型光學元件之理論參考。

參考文獻

- [1] D. Maystre, "Rigorous vector theories of diffraction gratings," in Progress in Optics, E. Wolf, ed North-Holland, Amsterdam, vol. 11, 1984.
- [2] R. Petit, Electromagnetic Theory of Gratings 1980.
- [3] M. Nieto Vesperinas and J. M. Soto Crespo, "Light diffracted intensities from very deep gratings," Phys. Rev. B38, pp. 7250-7259, 1988.
- [4] M. G. Moharam and T. K. Gaylord, "Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction," J. Opt. Soc. Amer., vol. 71, pp. 811-818, July 1981.
- [5] C. V. Raman and N. S. Nath, "The diffraction of light by high frequency sound waves: Part I," Proc. Ind. Acad. Sci. A, vol. 2, pp. 406-412, Oct. 1935.
- [6] _____, "The diffraction of light by sound waves of high frequency: Part II," Proc. Ind. Acad. Sci. A, vol. 2, pp. 413-420, Oct. 1935.
- [7] _____, "The diffraction of light by high frequency sound waves: Part III," Proc. Ind. Acad. Sci. A, vol. 3, pp. 75-84, Jan. 1936.
- [8] _____, "The diffraction of light by high frequency sound waves: Part V," Proc. Ind. Acad. Sci. A, vol. 3, pp. 459-465, May. 1936.
- [9] R. Guenther, Modern Optics, Wiley, 1990.
- [10] R. Magnusson and T. K. Gaylord, "Diffraction regimes of transmission gratings," J. Opt. Soc. Am., vol. 68, June 1978.
- [11] _____, "Diffraction efficiencies of thin phase gratings with arbitrary grating shape," J. Opt. Soc. Am., vol. 68, pp. 806-809, June 1978.
- [12] J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, New York: McGraw-hill, 1968.
- [13] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2nd ed, New York: Wiley, 1975.
- [14] D. Shin and R. Magnusson, "Diffraction by periodic arrays of dielectric cylinders," J. Opt. Soc. Am., Oct., 1988.
- [15] _____, "Diffraction by surface-relief gratings with conic cross-sectional grating shapes," J. Opt. Soc. Am., May, 1989.

Diffraction by surface-relief gratings with stair-step cross-sectional shapes

by

Chung-Yun Lee* Ching-Her Lee**

Abstract

In this paper, a simple transmittance theory is used for analysis of diffraction of plane waves by dielectric surface-relief gratings with stairstep (symmetric or asymmetric) cross-sections. Results in the form of diffraction efficiency are calculated, and are comparing to other researchers' work. The calculated results show that for the stairstep gratings, the one with even symmetric profile has a relatively faster weak high-order diffraction efficiency than asymmetric profile. The diffraction efficiency depends on the ratio of the grating thickness to the spatial periodic. while the ratio increases, the diffraction efficiency will decrease.