

# 從天邊那一朵雲談起

文/郭西川

別誤會，這篇文章要探討的不是蔡明亮獲獎的情色電影，這裡是物理雙月刊，我們要回顧的是出現在十九世紀末物理學上的另一朵雲，而且還是一朵烏雲。有趣的是，這朵雲也為投身其中的物理學家贏得獎項(諾貝爾獎)，而它雖不如電影那樣吸引普羅大眾的注意，但所造成的影響卻足以扭轉人類文明的發展方向。這朵烏雲就是黑體輻射。

以牛頓力學為中心思想的古典物理，在經過兩百年的演變發展後，建立了以力學、電磁學、統計熱力學、波動光學為主要架構的知識體系，在19世紀的下半葉登上巔峰。幾位代表性的人物如馬克士威爾(James Clerk Maxwell)、波茲曼(Ludwig Boltzmann)等，都是在這個時期奠下他們永垂不朽的地位。當時物理學家的意氣風發，可以由1900年英國物理學家凱爾文勳爵(Lord Kelvin 即 William Thomson)的一段話看出。凱爾文勳爵在一次展望新世紀科學發展的演說中指出：「從今以後，物理學將不再有任何新的進展。剩下來的只是不斷的改良測量的精確度，如此而已。」(There is nothing new to be discovered in physics now. All that remains is more and more precise measurement.)。這段話充分反應了當時整個物理界的心態：在古典物理嚴謹的架構下，物理學家已經完全掌握大自然的運行法則，剩下的只是瑣碎的數學計算罷了。然而，讓這個故事穿越一個世紀的時空流傳至今的並非這句豪語，而是凱爾文勳爵接下來說的這句話：「…但是天邊還有兩朵小小的、令人不安的烏雲。」(“…two small, puzzling clouds remained on the horizon”)。他所指的烏雲就是當時古典物理無法解釋的兩個實驗：邁克遜的以太漂移實驗以及黑體輻射實驗。凱爾文勳爵發表這些看法時，似乎還未察覺到風暴正圍繞著這兩朵小烏雲醞釀中，可惜他在1907年就過逝了，否則在他有生之年，應該能夠目睹當初他輕

描淡寫的這兩朵小烏雲，竟然在20世紀引發了物理學一場驚天動地的革命。

以太漂移實驗及黑體輻射實驗都跟光有關。前者證明了光速的恆定性，顛覆了世人對於時間與空間的既有概念；後者導致量子力學的建立，徹底改變了20世紀人類的物質文明。在這篇文章中，讓我們來回顧黑體輻射這朵小烏雲，究竟是如何撼動古典物理的巨廈。

1860年前後，柯希霍夫(Gustav Robert Kirchhoff)等物理學家開啓了熱輻射(thermal radiation)光譜的研究。所謂的熱輻射乃是發熱的物體會發出不同波長的電磁波的一種現象。例如太陽所發出的電磁輻射以紫外、可見光和紅外光居多，而蠟燭則主要發出可見光及紅外光。在絕對溫度不為零的情況下，所有的物體都不斷向周圍的環境發出熱輻射，同時也不斷的從周遭環境吸收熱輻射。只有當物體與周遭環境達到熱平衡時，物體吸收與發出熱輻射的速率才會一樣。實驗結果顯示，物體溫度越高所發出的光越多，波長越短。一般而言，物體的熱輻射頻譜跟它自身的組成材質有關。不過實驗上也發現有一類物體，儘管它們有不同的化學成份，可是在同一溫度它們下卻有相同的熱輻射頻譜。這類的物體稱之為黑體(Blackbody)。黑體輻射頻譜的普適性，引起了理論物理學家的興趣。為了摹擬黑體產生熱輻射的過程，當時的物理學家發展出以下的理論模型：假設有一內部中空的空腔(cavity)，只以一個小洞與外界接通。將此空腔加熱至某一溫度後，空腔內壁表面所釋放出的熱輻射將充滿空腔內部，而後透過小洞慢慢釋放至外界，就如同黑體發出輻射的過程。反過來說，當外界的輻射經由小洞進入空腔的內部，經多次反射後被腔壁完全吸收，則代表了黑體吸收輻射的過程。這其中最關鍵的問題，就是

確定黑體輻射的頻譜密度  $\rho(\nu, T)$  (spectral density, 相當於頻率為  $\nu$  時空腔中每單位體積每單位頻率內的電磁輻射能量) 的正確形式。1879 年(就在這一年, 愛因斯坦出生於德國南部的 Ulm, 普朗克獲得博士學位, 而馬克士威爾辭世), 史帝凡(Joseph Stefan)發現黑體的能量密度與絕對溫度的四次方成正比, 亦即

$$\int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu \propto T^4 \quad (1)$$

14 年後, 德國物理學家維恩(Wilhelm Wien), 利用熱力學的方法, 嚴格的證明了  $\rho(\nu, T)$  必定具有下列形式(此即維恩位移定律)

$$\rho(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (2)$$

但是維恩無法從理論來確定函數  $f$  的正確形式。1896 年, 維恩提出了一個只適用高頻區域的近似解

$$\rho(\nu, T) = \alpha \nu^3 e^{-\beta \nu / T} \quad (3)$$

其中  $\alpha$  與  $\beta$  為待定常數, 此即維恩猜想。1900 年 7 月, 雷利勳爵(Lord Rayleigh 即 John William Strutt)將當時發展已趨成熟的統計力學中的能量等分原理(equipartition theorem)應用到這個問題, 得到了所謂的雷利-金公式(Rayleigh-Jean formula)

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{R}{N} \nu^2 T \quad (4)$$

其中  $N$  為亞佛加厥常數(Avogadro's constant),  $R$  為氣體常數, 而  $R/N = k$  即為波茲曼常數。雷利-金公式在低頻時與實驗數據非常吻合, 可是在高頻範圍卻錯得非常離譜, 因為當  $\nu \rightarrow \infty$  時,  $\rho(\nu, T) \rightarrow \infty$ , 因此對頻率積分的結果會得到一個相當荒謬的結

論: 發熱物體所輻射出來的電磁波有無窮大的能量密度, 也就是說, 只要點燃一根火柴就足以照亮全宇宙。這個讓物理學家束手無策的結果又稱為紫外災難(ultraviolet catastrophe), 儼然是古典理論無法征服的化外之地。為了解決這個令人頭痛的發散問題, 雷利試著把(4)式人為地修改為

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{R}{N} \nu^2 T e^{-\beta \nu / T} \quad (5)$$

即使如此, 還是與實驗的結果有所出入。

就在紫外災難面世後三個月, 德國物理學家普朗克(Max Planck)找到了黑體輻射的頻譜密度  $\rho(\nu, T)$  的正確形式, 不過他當時似乎不知道雷利的工作, 因為在他並未在隨後正式發表的論文裡引用雷利的結果。普朗克研究黑體輻射已有數年之久, 他採用的方法是將空腔內壁表面上的每一點都視為一個小彈簧, 而每個小彈簧的頂端都黏著一個帶電粒子, 而然後讓這些帶電的諧振子在週期性的電場中運動。利用這個簡單的模型, 他在 1897 年得到以下的結果

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} U(\nu, T) \quad (6)$$

其中  $U$  是熱平衡時諧振子的總能量函數。在 1900 年的 10 月, 普朗克從他的同事魯本斯(Heinrich Rubens)那裡得知, 在低頻下頻譜密度  $\rho(\nu, T)$  會與溫度  $T$  成正比。憑著多年在這個問題中鑽研所累積的心得與直覺, 普朗克只花了一個晚上, 就把黑體輻射頻譜密度的正確形式寫出來。他發現如果假設諧振子只能在某些特定的能量狀態下振動, 而這些特定能量都是某個基本能量單位的整數倍, 就可以從理論上得到與實驗數據完全吻合的黑體輻射頻譜。普朗克進一步發現這個能量基本單位與諧振子振動的頻率成正比, 而諧振子振動頻率也就是電磁輻射的頻率, 因此波長較短的光具有較大的能量。依據這個假設, 普朗克得到以下的結果

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (7)$$

其中  $h\nu$  為能量基本單位，而  $h$  即所謂的普朗克常數，是一個新的基本常數。由 (7) 式可得知，在低頻極限時， $\rho(\nu, T) \propto \nu^2$  符合雷利-金公式。另一方面，在高頻極限時， $\rho(\nu, T)$  又回到了維恩猜想的結果，因此漂亮地解決了紫外災難的發散問題。

普朗克的假設有史以來，第一次有人提出能量是以不連續、不可分割的能量子(energy quantum)形式出現，完全違反了古典物理的最基本教條：時間、空間、能量等基本物理量皆可無窮分割。這個日後被公認為是量子力學開宗明義的基礎概念，為普朗克贏得了 1918 年的諾貝爾獎，然而深受古典物理薰陶的他卻始終對這個古怪的理論耿耿於懷。他後來在一篇文章中回憶道：「我當時已無計可施；不管任何情況、不計任何代價我一定要找出正確的答案...」。約有 10 年的光陰，普朗克甚至努力去證明量子的概念完全不脫出古典物理的範圍。即便如此，普朗克在物理學上仍有極大的貢獻。一個世紀後的今天，普朗克公式(7)依舊是決定熱輻射強度及頻率的標準方法，而普朗克當初引進的常數  $h$ ，已經變成自然界最重要的基本常數之一。

普朗克的成就，開啓了從古典通往量子世界的大門，即使他未能體會到他手中握有的是一把開啓嶄新時代的鑰匙，但是他的新理論卻鼓舞了當時默默無聞，但是註定日後會成為一代學術巨人的愛因斯坦。當時還棲身在瑞士伯恩專利局中擔任職員，只能利用閒暇時間來研究物理的愛因斯坦注意到(7)式雖然符合實驗，但當時的理論卻無法加以解釋，而式(3)恰好相反。因此他不打算依循普朗克的方法——亦即以輻射的產生與傳播的方式為出發點，而計畫從實驗的角度切入，找出新的方程式來解決黑體輻射的問題。他的出發點是與實驗有密切相關的維恩公式(3)。愛因斯坦後來之所以提出光量子的假說，是因為他發現在

維恩極限 ( $h\nu / kT \gg 1$ ) 下的電磁輻射，與古典理想氣體有類似的行為。愛因斯坦如何得到這個結果呢？首先他作了以下這個簡單的計算：在定溫下，有  $n$  個理想氣體分子在體積為  $V_0$  的容器中被壓縮至  $V$  時，熵的改變為

$$S(V, T) - S(V_0, T) = \frac{R}{N} \ln \left( \frac{V}{V_0} \right)^n \quad (8)$$

對於黑體輻射，假設  $\phi(\nu, T) d\nu$  是在頻率範圍  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  間單位體積內熵的密度，則依據熱力學公式可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{1}{T} \quad (9)$$

將維恩猜想代入上式並積分，則可得

$$\phi = -\frac{\rho}{\beta\nu} \left( \ln \frac{\rho}{\alpha\nu^3} - 1 \right) \quad (10)$$

現在假設所有的輻射都被包在體積為  $V$  的空腔中，則在頻率範圍  $\nu$  到  $\nu + d\nu$  中，體積  $V$  包含的總熵及總能分別為  $S(\nu, V, T) = \phi V d\nu$  及

$E(\nu, V, T) = \rho V d\nu$ 。因此在維恩公式適用的區域內，熵的改變可由下列公式表示

$$S(\nu, V, E) - S(\nu, V_0, E) = \frac{R}{N} \ln \left( \frac{V}{V_0} \right)^{NE/R\beta\nu} \quad (11)$$

比較(8)式及(11)式中的指數，愛因斯坦發現

$$E = n \frac{R\beta}{N} \nu = nh\nu \quad (12)$$

他因而大膽地提出以下的光量子假說：

從熱力學的觀點來看，低密度單頻

電磁輻射所表現的行為，彷彿它是由大小為  $R\beta v/N$ 、各自獨立的能量子所構成的理想氣體。

換句話說，愛因斯坦認為光是由不連續的量子所構成，就像是在容器中來回運動的氣體是由一顆顆原子所組成一般。光量子說的提出在日後看來是一件劃時代的大事，可是當時並未點燃科學革命的烽火，原因是當時的物理學家雖然接受愛因斯坦的結果，但是他們認為這可能只是電磁場在熱平衡態時的一個奇特性質而已。然而，正所謂初生之犢不謂虎，這一年才剛滿 26 歲的愛因斯坦把他的光量子假說又大膽地往前推了一步，提出了所謂的啟發性原理(The heuristic principle)：

*根據熵隨體積變化的關係，如果(密度夠低的)單頻電磁輻射表現得像是由大小為  $R\beta v/N$  的能量子所構成的離散介質，則這個結果似乎暗示著支配光的產生及轉變的物理定律，是否也建立在光是由這類能量子所組成的概念上。*

簡言之，愛因斯坦把光量子的概念，從自由電磁場推廣到電磁場與物質間有相互作用的情況下；而光電效應(photoelectric effects) 就是光量子說的最佳試金石。

早在 1888 年前後，科學家已經知道以紫外光照射金屬表面，金屬就會放出帶電粒子。1899 年，湯姆生(Joseph John Thomson)以實驗證實這些帶電粒子就是電子。之後，隨著實驗光源的改良，物理學家發現光電效應中也存在著一些與古典物理矛盾的現象：

1. 依據古典波動理論，當光源強度增加時，由金屬表面射出的光電子(photoelectrons)所形成的電流變大，而電子的動能也應該跟著增加。但是實驗結果發現，由金屬表面所逸出的電子的動能竟然與光源強度無關。
2. 依據古典波動理論，以任何頻率的光照射金屬表

面，只要強度夠大的話，都一定會產生光電效應。但是實驗結果發現，一旦入射光的頻率小於某一個特定的截斷頻率(cutoff frequency)  $\nu_0$ ，不管光源的強度再怎麼大，也不會觀測到光電子。

3. 依據古典波動理論，即使光源的強度很微弱，但只要照射的時間夠久，電子還是可以累積夠多的能量脫離金屬。但是實驗上並未觀測到這種現象。

古典物理再一次面對嚴峻的挑戰，但這正好給了愛因斯坦一個發揮的舞台。依據啟發性原理，愛因斯坦對光電效應作了以下的解釋：在光場與物質交互作用的過程中，一個光量子把它的能量完全轉給一個電子，而這個能量轉換的過程與其它的光量子無關。當電子獲得能量而逃離物體的內部時，通常在達到表面之前會損失部份能量，這些損耗掉的能量稱為功函數(work function)，以  $P$  表示之。若入射光的頻率為  $\nu$ ，則電子所具有的最大能量為

$$E_{\max} = h\nu - P \quad (12)$$

愛因斯坦對於光電效應所描繪出的簡單圖像，不但輕易地解釋了上述矛盾，更重要的是他預測了  $E_{\max}$  與  $\nu$  呈線性關係，而  $E_{\max} - \nu$  圖的斜率就是普朗克常數；測量  $E_{\max}$  對  $\nu$  的變化便可決定普朗克常數的值。愛因斯坦的光電效應定律在數年後被實驗證實，他因此而獲得 1921 年的諾貝爾物理獎。時至今日，光電效應已經大量的應用在我們的日常生活中，例如影印機，數位像機，太陽能電池等等。今天許多工程師還是必須依靠愛因斯坦的理論來設計許多的消費性商品。

愛因斯坦的光電效應定律除了在理論上印證普朗克量子論的獨特性外，最重要的意義在於它暗示著光可以同時具有波動及粒子兩種特性。這種波動 - 粒子的二重性在稍後從舊量子論(old quantum theory)演變到我們現在熟知的量子力學的過程中，發揮了關鍵的啟發作用。這一段歷史是可以說是人類心智文明演化過程中，最令人嘆為觀止的二十年。本文因篇幅有限，不多加敘述，有興趣的讀者可參閱文末所列之參考資

料。

最後在文章結束前，我想趁機會提一下在量子概念誕生的過程中，統計力學所扮演的角色。統計力學是馬克士威爾及波茲曼所發展出來，將機率統計的方法與牛頓力學結合，目的是用來研究龐大數目(如亞佛加厥數)的分子之隨機運動。令人意想不到的，這樣一個本質完全是古典的理論卻在 20 世紀初量子革命中扮演著關鍵的角色。愛因斯坦若不用波茲曼統計力學中最著名的求熵公式( $S = k \ln W$ )來推得(8)跟(11)兩式，他很難一眼看出光量子存在的線索。回過頭來看普朗克在 1900 年的工作。當年的 10 月他以直覺

“猜”出了頻譜密度  $\rho(\nu, T)$  的正確解，而在同年 12 月的另一篇論文中，在已確知  $\rho(\nu, T)$  的前提下，他發現黑體輻射的熵的確可以由波茲曼公式  $S = k \ln W$  求得，而  $W$  正好是將全部的能量子(不可分辨)分配到全部諧振子(可分辨)的所有可能組合的數目。這個奇怪的計數法則，對於當時的物理界來說，簡直是匪夷所思。不過對於不計代價，一心一意只想解決黑體輻射問題的普朗克而言，即使對這樣的結論充滿困惑，也只能默默接受。事實上，這個結果已經預言了四分之一個世紀後才被發現的玻色-愛因斯坦統計法則(Bose-Einstein statistics)，只可惜它已經大大地超出 1900 年當時物理學家能理解的範圍。天邊這朵小小的烏雲所引發的風暴，顯然蘊藏了遠比它外觀還深奧的內涵，以至於物理學家終究得花上幾十年的光陰來搞清楚它微妙的結構，才得以走進美麗的量子新世界。

## 參考文獻

1. A. Pais, *Inward Bound: Of Matter and Forces in the Physical World*, Oxford University Press, New York, 1988.
2. A. Pais, *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, New

York, 1982.

3. R. Eisberg and R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, 1985.
4. M.H. Shamos, *Great Experiments in Physics: Firsthand Accounts from Galileo to Einstein*, Dover Publications, New York, 1987.
5. S. Perkwitz, 林志懋譯, *光的故事 (Empire of Light)*, 貓頭鷹書房出版
6. S. Smolin 著, 丘宏義譯, *量子重力(Three Roads to Quantum Gravity)*, 天下文化出版
7. S. Treiman 著, 閻愛德、黃小玲、高涌泉譯, *奇異的量子(The Odd Quantum)*, 徐氏文教基金會出版
8. G. Piel 著, 張啓陽譯, *科學人的年代—20 世紀：科學發展最快速的 100 年 (The Age of Science: What Scientists Learned in the Twentieth Century)*, 遠流出版社。

---

## 作者簡介

郭西川 國立彰化師範大學物理系副教授

E-mail: scgou@cc.ncue.edu.tw