

半線性橢圓型偏微分方程式之解的漸近行為及不穩定性的研究
Asymptotic Behavior of Solutions of Semilinear Equations with Sub-critical
Nonlinearity

李錦瑩

中文摘要

我們將研究下列半線性橢圓型偏微分方程式之解的漸近行為及不穩定性。 $-\Delta u = \beta f(u)$ in Ω . $P(\beta) \mid u = 0$ on $\partial\Omega$. 其中, Ω 為 n 域, 且 Ω 之邊界 $\partial\Omega$ 為平滑. 當 $f(u)$ 成長速度大於線性, 則我們將證明, 對任意緊緻子集 K , 當 β 趨近於零時, 恆有 $\lim \min \{u(x, \beta) \mid x \in K\} = +\infty$. 其中, $u(x, \beta)$ 之選取受到下列限制: 若 $f(0)=0$, 則 $u(x, \beta)$ 可為 $P(\beta)$ 之任意非零解. 若 $f(0)>0$, 則 $u(x, \beta)$ 可為 $P(\beta)$ 之任意非極小解. (關於 "非極小解" 之定義, 請參閱論文第一節.) 除此之外, 我們也將證明 $P(\beta)$ 之非極小解 $u(x, \beta)$ 在 Ω 內部之振動現象將逐漸擴大. 當 $f(u)$ 成長速度幾近乎線性時, 則我們將證明, 存在正數區間 $I = (0, r)$, 使得下列敘述成立: (1) 當 β 在 I 內部時, 則 $P(\beta)$ 恰有一個解 $u(x, \beta)$; 而當 $\beta > r$ 時, $P(\beta)$ 無解. (2) 若 K 為 Ω 的任意一個緊緻子集, 則當 β 趨近於 r 時, $\lim \min \{u(x, \beta) \mid x \in K\} = \inf$. 一般而言, 大家知道 r 的上限估計; 在本文之中, 我們有估計 r 之下限的方法. 尤其, 當 $f(u)$ 成長速度幾近乎線性時, 我們可以得到 r 的真正數值. 在這篇論文的最後一節中, 我們將研究半線性橢圓型偏微分方程式之解的不穩定性. 我們將證明, 若適當地限制非線性項, 則半線性橢圓型偏微分方程式之所有的正解均為不穩定解. 另一方面, 對一般的非線性項, 我們將證明, 若所討論的區域足夠小, 則方程式之所有正解均為不穩定解。

關鍵字：偏微分方程式；漸近行為；不穩定性

Key words：Semilinear-Partial-Differential-Equations; Asymptotic-Behavior;
Unstability