微分幾何課程教學改造與學生興趣提升之研究結案報告

李國瑋

國立彰化師範大學數學系

108 年 9 月 15 日

摘要

本計畫是針對 106 學年度國立彰化師範大學數學系開設的微分幾何 (一) 在教學上遇到的各種困難提出可能的解決方案, 在 107 學年度微分幾何 (一)(二) 課程中確實執行並且不斷地反思與調整下, 當中採用量化的方法分析數據, 從中解讀在課程改造之後學生對於微分幾何的興趣以及學習成效是否有顯著提升。

1 微分幾何課程教學改造研究簡述

關於這項教學實踐研究計畫 — 微分幾何課程教學改造與學生興趣提升之研究 — 提出計畫的時間點是我在國立彰化師範大學任教還不滿一個學期的時候, 當時已發現到在這門課的教學遇到重重困難。那時初步反思的結果發現以下三點困境與挑戰:

(1) 我在教學前對於學生的背景並沒有深入了解, 以致教學上感到吃力。

(2) 這門課的教學方向和學生未來志向不符, 對於學生未來發展有限。

(3) 我在這門課當中經常提供過多的觀點, 無法有效提升學生對於學科的認識。

在取得這項研究計畫後, 便試圖透過研究計畫所提的可行方案對於 107 學年度的微分幾何 (一)(二) 課程中進行改造, 原則上課程當中的每個環節都進行調整, 有些甚至大幅度改變。首先以上課教材的重新改造爲例說明課程的改變, 這些相關教材我都放在個人網頁供所有人查閱與使用:

`http://www.math.ncue.edu.tw/~kwlee/107Geometry.html`

(A) <u>課程教材與學習單的全面改版</u>: 原先的上課用教材是將教科書的重點節錄而製作, 講義中留有空白處供學生聽講時作筆記。而教材將以三個小時的講授與活動包裝成一個單元製作學習單, 學習單一開始明列單元介紹與學習目標, 讓學生知道這次的活動的學習重點。

把教材利用時間與主題適當地切割, 這個好處是學生學習時比較能夠掌握結構性, 明列學習目標除了有助課堂可以不斷地聚焦之外, 學生在課後復習時也能依循這些條列式的重點快速掌握其精髓。此外, 初學者通常無法長時間專注於學科, 適當地告知階段性任務也有助學習。

(B) 增加問題討論與預備知識: 有別於以往直述式鋪陳, 新教材在正式進入主題前都會增加問題討論或是預備知識的部份。問題討論的題材不必受限於數學, 加入很多生活情境, 主要是引導學生對幾何能夠興趣提升。學生對於這類生活問題十分感興趣, 課堂中開放上網查資料不至於胡亂猜測, 同一個問題通常會有兩組以上同學彼此討論, 意見相左時可以互相辨論。

另一方面, 這門課的訴求是希望學生只要學完大一微積分與線性代數就可能銜接微分幾何課, 然而微分幾何課以目前學制而言是放在四年級數學組必修, 多數同學其實隔了兩年之後對於微積分與線性代數的觀念生疏不少, 於是適當地加強有其必要。關於這個部份進行的方式是盡量讓學生透過自己的能力找到答案, 比方說利用網路找資料, 或者是和伙伴討論共同得到結果(既然他們曾經學過, 那麼基本上可以很快得到正確的答案)。若他們真的找不到結果, 在台下巡視的時候適當地給予提示也是很好的方法。

(C) 增加課堂的互動: 每一個單元活動一開始都用撲克牌抽牌的方式重新選坐位與伙伴配對。以往課程希望同學進行分組時, 學生總是會選擇熟悉的同學, 但是班上常常有所謂的「邊緣人」, 他們或許也不盡然是真的人際關係不好, 只是被動地不想自行找人, 或是當其他組都已經配對好之後他沒得選。這時打破這個情境的方式是每一次的活動學習單都會重新抽牌, 讓每一次的互動都會擦出不同的火花。學生對於抽撲克牌的事情反應良好, 畢竟他們並沒有在其他的課程當中實施這件事。特別對於四年級的同學, 我會對他們說: 你們可能同班三年卻從來也沒有跟他講過任何的話, 不妨藉著這個機會透過活動好好認識對方。在茶餘飯後聊到抽籤的事也會有許多有趣的話題。

(D) 增加教具的實作: 因爲有研究計畫的補助, 所以這一學年有充足的經費製作教學用的教具。除了自己製作教學用教具外, 學生們也樂於嘗試製作新的教具, 特別是有一些學生未來想要從事國、高中數學老師, 他們有了這些經驗, 未來就有很多的想法實踐在未來的課程中, 我認爲這種傳承非常重要而且保貴。

關於教具的使用, 在課堂上的確可以展現出活絡氣氛, 更重要的是教具在學生的手上可以更深刻的感受到要傳達的概念, 比起黑板的教學, 師生之間以及學生與數學之間總是有一層隔閡在。唯一比較麻煩的一點在於, 爲了要讓學生每一組就有教具的情形下, 每次上課就必須搬一堆教具到教室, 或是有些教具確實比較難準備 (沒有現成的教具而必須手作, 所以數量不夠多只好慢慢傳遞之下), 教具的效益會略有減少, 但是整體而言對於學生的學習成效以及興趣仍有大幅提升, 在後面的資料分析部份可以確實展現這個現象。

(E) 平時成績評比的改變: 新年度關於學生的平時成績, 有別於以往都是大家寫一份作業有一些缺失, 這次採用「客製作作業」, 同學可以依照自己的興趣選擇交作業的種類與題目, 喜歡數學研究的同學, 給他們幾篇有趣的幾何文章, 寫一寫心得報告, 甚至有機會進行研究; 未來要從事國、高中老師的同學, 他們想要多設計一些教案以及教材開發, 製作教具也是很好的選項。未來要走資訊領域的同學, 設計和幾何相關的電腦程式, 從不同的面向認識幾何。這部份的改變也很受到學生的肯定。

2 資料分析

這一部份的資料分析是將 106 學年度與 107 學年度微分幾何 (一) 課程中, 使用不同教學方法下帶來的學習成效做比較。利用這兩年期末測驗在題目完全一樣的情況下, 統計同學作答的正確率進行分析。106 學年度的參與期測末驗的學生人數是 20 人, 而 107 學年度的學生人數是 27 人 (修課人數是 26 人, 有 1 人旁聽也有參與期末測驗, 這裡也將這位旁聽的學生計入評比)。

2.1 二次曲面的確實理解

這個問題的設計理念是在兩次的教學當中, 第二次教學在課堂中使用實體教具的時間比較多的情形下, 學生從中探索這個幾何物體的特性。

問題 **1.** 教具題: 教具所呈現的曲面最有可能用下列哪一個方程式表達? 答: E。

(A) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$。 (B) $z = x^2 + y^2$。 (C) $z = x^2 - y^2$。

(D) $z^2 = x^2 + y^2$。 (E) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$。 (F) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$。

關於這個曲面, 還有以下什麼性質? 正確者請打圈 (◯) 錯誤者請打叉 (×)。

(◯) 2. 它是正則曲面 (regular surface)。

(◯) 3. 它是旋轉曲面 (surfaces of revolution)。

(◯) 4. 它是雙直紋面 (doubly ruled surface)。

(×) 5. 它可以用映射 $\mathbf{x}(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u)$ 表示。

以下表格列出兩屆作答正確率。

作答正確率	問題 1	問題 2	問題 3	問題 4	問題 5
106 學年度	85.0%	95.0%	70.0%	70.0%	40.0%
107 學年度	85.2%	96.3%	92.6%	63.0%	81.5%

這一系列的問題, 除了問題 4 的正確率後者低於前者外, 其他題目都顯示後者的學習成效是比較好的, 特別是問題 3 與問題 5 有顯著的提升。至於問題 4, 雖然正確率較低, 但是還在可接受的範圍。另一方面, 前一屆學生對於問題 4 表現比較好的另一個原因是該屆有出一題紙本作業, 討論雙直紋面的概念, 並請同學看完文章 (文章以數學的方式證明雙直紋面的性質) 後寫下感想, 所以學生理應對這個問題有更深的印象。

2.2 幾何概念的認識

這一部份想要檢視學生在微分幾何課程中提到的相關數學是否有基本的認識。

問題. 是非題: 下列敘述正確者請打圈 (◯) 錯誤者請打叉 (×)。

(×) **6.** 正則曲面 S 上一點 p 的附近若用參數式 $\mathbf{x}(u,v): U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ 表達, 其中 $\mathbf{x}(q) = p$, 則 $\mathrm{d}\mathbf{x}_q$ 是一個線性變換, 並且若用矩陣表達這個線性變換時, 它是一個 2×3 的矩陣。

(×) **7.** 每一個第一基本式 $\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$ 都存在唯一一個參數式 $\mathbf{x}(u,v)$ 對應。

(◯) **8.** 正則曲面的第一基本式可以反應出曲面上的兩曲線夾角、曲線的弧長、曲面面積等幾何量。

(×) **9.** 在未吹氣的氣球表面上畫兩條互相垂直的線, 吹氣後, 雖然線條彎曲了, 但它們仍然垂直。

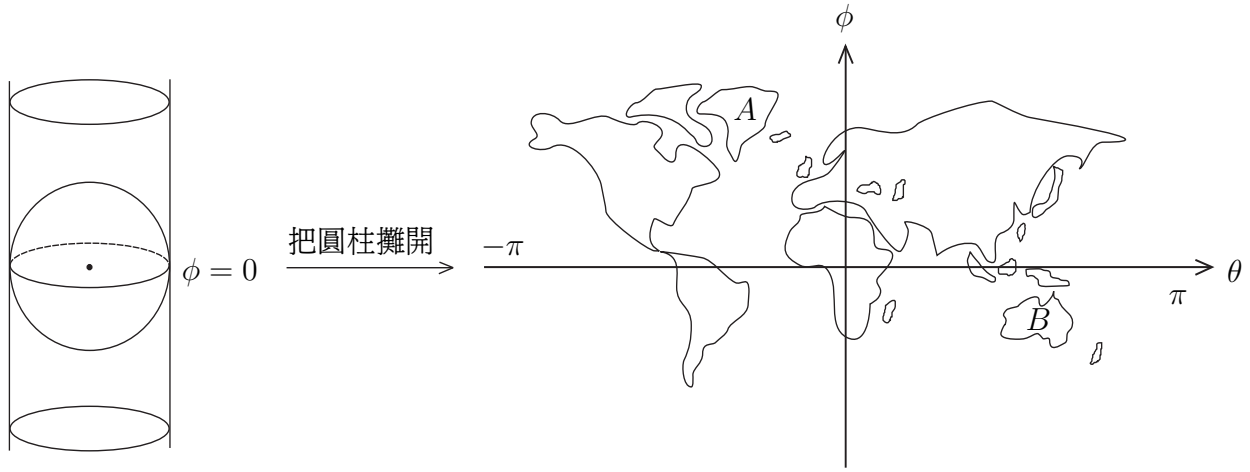
以下表格列出兩屆作答正確率。

作答正確率	問題 6	問題 7	問題 8	問題 9
106 學年度	55.0%	65.0%	90.0%	95.0%
107 學年度	63.0%	85.2%	88.9%	88.9%

關於問題 6 與問題 7, 後屆學生的表現比較好, 問題 8 其實表現一樣, 問題 9 雖然表格中看到的是前屆學生表現較佳, 但這裡應說明的是, 這個問題在第一年我已經使用課程改造的方法進行教學, 也就是說, 當時課堂中我一人發放一個氣球, 請同學先猜測氣球吹大之後的兩曲線之交角, 然後再實際觀察其結果。那時候就有發現學習成效非常地好, 於是第二年也再用一樣的方式再呈現一次, 雖然成效降低, 但也在可接受範圍, 整體來說作答正確率有達到預期的成果。

2.3 地圖

問題. 下圖是利用 麥卡托投影法 (Mercator projection) 所繪製的世界地圖。麥卡托投影法的概念是想像地球外面有一個圓柱, 圓柱與地球在赤道處相切, 則經線會對應至地圖的鉛直線, 緯線會對應至地圖的水平線。至於每條緯線對到地圖上的高度, 必須遵照「水平方向和垂直方向的縮收比例一樣」的方式繪製, 這個縮放的關係對緯度而言會是一個非線性的關係。而保持引號所述的性質, 若用精確的數學語言描述, 會是: 麥卡托投影是一個 保角映射 (conformal map), 顧明思義, 我們只要在地圖上量角度, 就可以知道地球上的角度關係。



這幅世界地圖中, $\theta=\theta_0$ 會對應到地球上的某條 *經線* (longitude; meridian) 而 $\phi=\phi_0$ 會應到地球上的某條 *緯線* (latitude; parallel)。而 θ 的正負號代表東經或西經; 至於 ϕ 的正負號代表北緯或南緯。若用 (θ,ϕ) 表示世界地圖上的點, 利用 *反麥卡托投影* (inverse Mercator projection) 的方式將 (θ,ϕ) 對應回地球上的一點, 將這個映射記爲 $\mathbf{x}(\theta,\phi)$, 其第一基本式記爲

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}\theta^2 + 2F\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi + G\,\mathrm{d}\phi^2,\ \text{其中}\ E=E(\theta,\phi),\ F=F(\theta,\phi),\ G=G(\theta,\phi)。$$

(◯) **10.** 此時, 利用 $\mathbf{x}(\theta,\phi)$ 所得第一基本式的 F 一定處處都是零。

(◯) **11.** 在世界地圖上標記首爾爲 P、台北爲 Q、東京爲 R, 並以直線連接 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{QR}$, 用量角器測量 $\angle PQR$ 的角度爲 ψ, 則 ψ 角也如實地反應從台北觀測首爾與東京之間的夾角。

(×) **12.** 學生甲在這張世界地圖中發現: 格陵蘭 (地圖上的區域 A) 的面積比澳大利亞 (地圖上的區域 B) 還要大, 所以推論出: <u>格陵蘭的實際面積比澳大利亞的面積大</u>。這個推論正確嗎?

(◯) **13.** 學生乙進行以下推論: 在地球上的每一條經線長度都一樣, 而經線對應到世界地圖上是鉛直線, 若利用 $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\theta_0,t)$ 表示地圖上的鉛直線, 則 $\boldsymbol{\alpha}'(t)=(0,1)$, 所以 $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|_{\mathrm{d}s^2}=\sqrt{G}$。既然在不同的經度下經線長度都一樣, 而經線長度是要把 $\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|_{\mathrm{d}s^2}$ 對 t 積分, 所以推論出: <u>第一基本式的 G 一定和 θ 無關</u>; 也就是說, 實際上 $G=G(\phi)$。這個推論正確嗎?

(◯) **14.** 學生丙透過地球上不同緯度的緯線長短推論出: 固定 $\theta_0\in[-\pi,\pi]$, 函數 $E(\theta_0,\phi)$ 對變數 ϕ 而言, 在 $\phi=0$ 會達到最大值。這個推論正確嗎?

以下表格列出兩屆作答正確率。

作答正確率	問題 10	問題 11	問題 12	問題 13	問題 14
106 學年度	85.0%	85.0%	90.0%	50.0%	70.0%
107 學年度	88.9%	74.1%	81.5%	55.6%	96.3%

這一部份的結果顯得有趣, 問題 11 與問題 12 後屆學生表現比前一屆差, 降低百分之十基本上是一個臨界的範圍, 而其他評比顯得比較好, 特別是問題 14 的結果出乎意料, 我似乎沒有在課堂上對於這個觀念著墨太多。

2.4 晨昏圈

問題. *晨昏圈* (terminator) 是太陽照射於地球上分成白天與黑夜的界線。各位若有搭飛機出國的經驗, 應該會在旅途中看到飛機螢幕上顯示 *晨昏圈曲線* (terminator curve)。
這條曲線在世界地圖上的呈現如圖 1 所示。左方示意的是太陽光平行照射至地球時, 只有一半的區域會是亮的, 即爲白天, 而另外一半是暗的, 即爲夜晚。現將這個狀態用麥卡托投影後就得到右圖, 白色區域是白天, 灰色區域是夜晚。

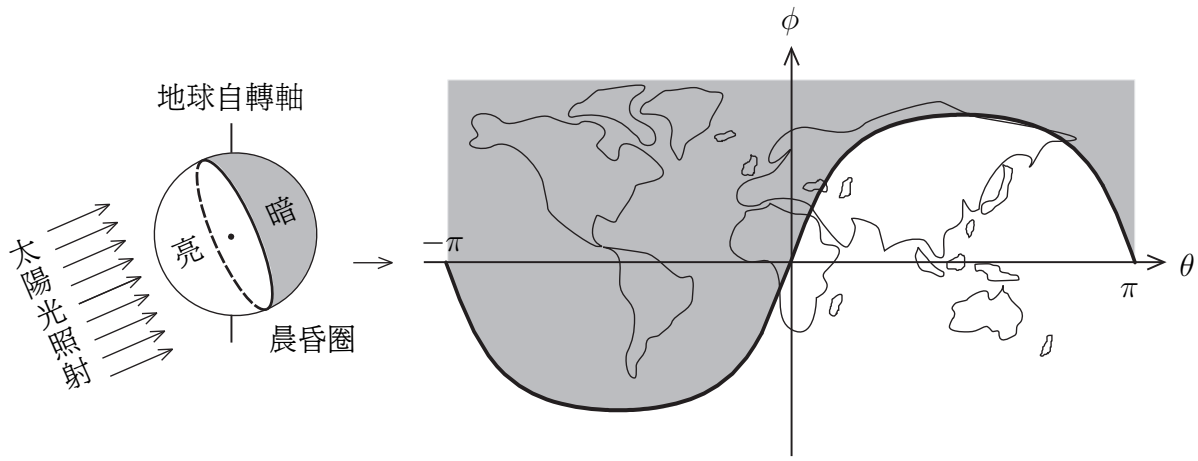


圖 1: 晨昏圈曲線 (terminator curve)。

以下討論假設地球是球狀物, 地球表面在 $\mathbb{R}^3$ 中相當於方程式 $x^2+y^2+z^2=6363^2$。

(×) **15.** 晨昏圈曲線與經線的交角爲定值。換言之, 晨昏圈曲線是一條 斜駛線 或 恒向線 (loxodromes)。

(○) **16.** 因爲太陽照射地球時是一半的區域亮, 一半的區域暗, 所以晨昏圈曲線畫在世界地圖上的灰色區域與白色區域面積也會一樣。

(×) **17.** 晨昏圈在地球上總是一個大圓, 所以晨昏圈曲線在世界地圖上即使在不同的時刻 (四季變化) 下, 形狀一定不會改變, 只差一個平移。

(○) **18.** 晨昏圈曲線在地圖上是一條正則曲線 (regular curve)。

(○) **19.** 如圖 1, 假設這條晨昏圈曲線用參數式表示爲 $\boldsymbol{\alpha}(t)=(\theta(t),\phi(t))$, 其中 $0\le t\le 1$, 並且 $\boldsymbol{\alpha}(0)=(-\pi,0)$, $\boldsymbol{\alpha}(1)=(\pi,0)$。考慮積分

$$\mathtt{I}=\int_0^1\sqrt{E(\theta'(t))^2+2F\theta'(t)\phi'(t)+G(\phi'(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

則 $\mathtt{I}=2\pi\cdot 6363$。

(○) **20.** 如圖 1, 將世界地圖上 $\phi=0$ 的線用參數式表示爲 $\boldsymbol{\beta}(t)=(t,0)$, 其中 $-\pi\le t\le\pi$。考慮積分

$$\mathtt{II}=\int_{-\pi}^{\pi}\|\boldsymbol{\beta}'(t)\|_{\mathrm{d}s^2}\,\mathrm{d}t,$$

則 $\mathtt{II}=\mathtt{I}=2\pi\cdot 6363$。

學生針對這一個題組的作答情況如下:

作答正確率	問題 15	問題 16	問題 17	問題 18	問題 19	問題 20
106 學年度	20.0%	70.0%	65.0%	90.0%	70.0%	60.0%
107 學年度	18.5%	63.0%	74.1%	96.3%	70.4%	77.8%

問題 15 與問題 16 後屆表現比較不好, 但是其他問題的表現就比較優異, 特別問題 20 的感覺是比較好的。比較有趣的是問題 15 兩屆學生的表現都不如預期, 應該是我在課堂中解說斜駛線的概念時, 讓學生產生誤會。

2.5 梯度的認識

問題. 有兩座小山丘, 如圖 2 (a) 所示, 將它看成是定義域爲 $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ 上函數的圖形, 該函數記成 $z = f(x, y)$, 其中 $f(x, y)$ 是光滑函數。另一方面, 我們把山丘上滿足 $\{f(x, y) = \text{常數}\}$ 的點重新描繪在地圖上, 如圖 2 (b) 所示, 則得到許多條等高線。在這裡, 地圖的描繪方式是直接參照小山丘的 x 與 y 的分量而記錄坐標。

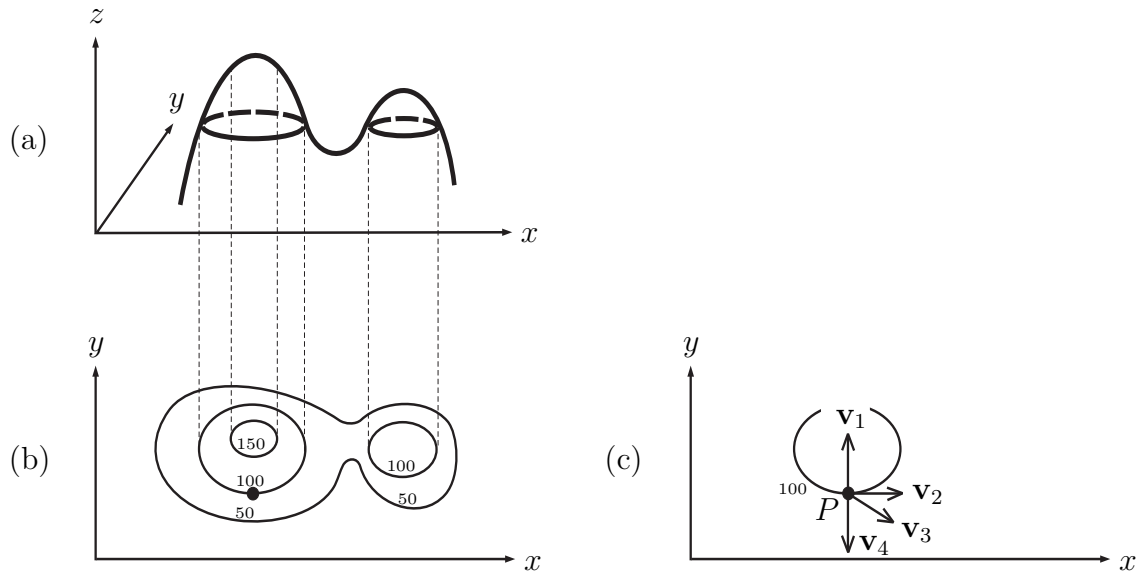


圖 2: 兩座山丘與其地圖。

21. 這兩座小山丘的最高點附近都可以理解爲一個正則曲面 (regular surface) 嗎? 答: 是。

22. 如果用 $(x, y) \in U$ 爲局部坐標表達這兩座小山丘, 得到映射 $\mathbf{x}(x, y)$, 則利用 $\mathbf{x}(x, y)$ 所寫下的第一基本式 $\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}x^2 + 2F\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + G\,\mathrm{d}y^2$ 當中, F 一定是零嗎? 答: 不是。

23. 地圖上標高爲 100 的曲線上有一點 P 以及四個方向 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, 圖 2 (c) 所示, 哪一個方向最有可能是 *梯度向量* (gradient) $\operatorname{grad} f(P)$? 答: $\mathbf{v}_1$。

學生針對這一個題組的作答情況如下:

作答正確率	問題 21	問題 22	問題 23
106 學年度	70.0%	35.0%	85.0%
107 學年度	81.5%	33.3%	59.3%

問題 23 後屆學生成效較低的原因是缺乏實質的練習, 前屆學生因爲有紙本作業的輔助, 得到比較多相關的心得。

2.6 梯度與正則曲面的認識

問題. 考慮函數 $F(x,y,z)=xyz^2$, 其中 $x,y,z\in\mathbb{R}$。

24. 試求函數 $F(x,y,z)$ 的所有 臨界點 (critical points)。

25. 試求函數 $F(x,y,z)$ 的所有 臨界值 (critical values)。

26. 請問 $xyz^2=1$ 是一個 正則曲面 (regular surface) 嗎? 爲什麼?

解.

24. 解 $\mathrm{d}f=\begin{bmatrix} yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{bmatrix}\equiv 0$ 得到函數 $f(x,y,z)$ 的所有臨界點爲 $(x,y,0),x,y\in\mathbb{R}$ 與 $(0,0,z),z\in\mathbb{R}$。

25. 因爲 $f(x,y,0)=0$ 與 $f(0,0,z)=0$, 所以函數 $f(x,y,z)$ 的所有臨界值是 0。

26. 函數 $f(x,y,0)$ 的正則值 (regular value) 是 $\mathbb{R}-\{0\}$, 而 $1\in\mathbb{R}-\{0\}$, 所以 $xyz^2=1$ 是一個正則曲面。

學生針對這一個題組的作答情況如下:

作答正確率	問題 24	問題 25	問題 26
106 學年度	73.0%	94.0%	97.0%
107 學年度	65.2%	81.5%	83.7%

這一個題組是以申論題的型式出題, 很明顯地後屆學生數學的寫作能力有明顯地下降。在授課時數一樣的情形下, 新學年的微分幾何比起舊學年的課程來說減少數學專業分析的解說, 而學生在平時的數學操作練習也比前一年少。然而後屆學生基本上還是具有一定的觀念。關於這一部份的問題, 將留到最後反思與結語的部份再予以論述。

3 教學評量

除了學生在學期間進行測驗而得到各式評比以判讀課程設計與學習成效之關聯外, 我們也可以從學生填寫的期末教學意見調查當中得知學生對於這門課程的喜好程度。下方的表格列出各學期微分幾何課程中的教學評鑑值。基本上學生對於這門課程的各項評比也是趨於滿意。

學年度	開授課程	修課人數	填寫人數	評鑑值	備註
106-1	微分幾何 (一)	22	10	4.56	數學系
107-1	微分幾何 (一)	26	17	4.79	數學系
107-2	微分幾何 (二)	12	9	4.94	數學系

4 反思

這門微分幾何課程透過之前在課堂中看到的困難, 在教學實踐研究計畫當中提出一些可行的方案, 於新的學年度確實執行與改造, 利用期末測驗的方式比較兩屆學生的學習成效。前一節的分析已說明了這項教學改造之下的一些明顯成果。然而這一年的課程運作當還是有遇到一些其他的情況, 在此條列出來, 希望未來的課程當中能再進行調整。

(A) 數學操作的均衡: 在 2.6 的地方已提出新年度的學生在數學操作能力下滑的問題, 這件事情主要的考量是根據開學前的調查, 多數學生在畢業之後並沒有想要再往數學的碩士與博士深造 (就算要唸碩博士, 主要的興趣也是統計或資訊等應用數學層面, 而非純數), 所以課程的學習目標轉變爲給同學比較多觀念的確實理解, 而多數學生有志於從事國中或高中老師之下, 活化課堂讓他們對於以後有多一些想像空間, 對於以後的課程設計與教案開發可以有多一些新的元素。關於班上有一、兩位同學要走數學的學生, 應於學期當中告知數學專業的部份必須自學, 採用個案的方式協助他。所以關於這個問題, 我認爲較理想的解決方案是: 在開學第一次上課 (或之前) 先調查清楚學生未來的生涯規劃, 掌握大部份同學的需要求而設定課程進度並調整課堂呈現, 有特殊情況的學生在課後適時給予協助。

(B) 分組的實質性: 在大部份的課堂活動中, 採用抽撲克牌分組的方式有實質的效益, 但是一個學年下來的所有活動中, 有幾個課堂分了組但是沒有明顯的分組活動的進行, 所以同學不知道爲什麼這次活動還需要抽牌, 這是有一些同學注意到並且反饋給我的事。這部份在之後的課程中應再全面檢視課程設計, 理應有一種讓分組有實質的意義的課程設計。

(C) 如何培養學生有獨力思考的能力, 這才是最大的困難: 在這幾年的教學當中, 我似乎都是著重在怎麼樣把數學觀念表達得傳神, 或是用言簡意賅的方式讓學生可以立即得到學問, 或是讓學生印象深刻, 然後試圖在一些測驗或評比之中觀察學生的學習成效以印證教學法的優劣性。然而, 在這一年的課程中, 特別是看到問題 15 在兩屆學生的作答都與實際情況完全相反的時候, 頓時發現這當中還有一個更艱困的挑戰, 就是在於教學應該是培養學生要有獨力思考的能力。學生的學習不只是有把上課交待的內容完成即可, 而是要有更遠大的夢想, 可以學以致用, 這裡所謂的學以致用, 是一個更廣泛的概念, 就是從課程中學到的獨力思考的能力去正確解決或回答全新的事物中。很顯然地, 若以這種更理想的教學目標爲依據之下, 這門課程仍然是不合格的。到底有什麼樣的教學方式, 可以讓多數學生在學習過後, 可以正確地回答 15 題, 我覺得這是一個需要更加深思的問題。未來當然也期許自己朝著這種更加理想的方式前進, 才能更貼近教育與教學的真締。

5 結語

根據學生未來的需求或志向, 即使是同樣的數學內容, 也可以重新設計出完全不同樣貌的特色課程。這樣的設計不僅不失課程的本質, 也能大幅提升學生對於微分幾何課程的學習成效。學生在課堂中可以很快樂地學習並學到當中的理論, 並且能依據自己的興趣完成客製化的期末作業。關於學生數學論述

能力降低一事, 可針對個案再給予加強(其實想要往純數方面繼續唸的同學在那些問題的表現是好的), 對於其他學生而言, 他們有達到最基本的要求即可。

對教師而言, 激勵自己的聯想與創造力, 在教學中多花一些心力與巧思, 就可以汰換過去一般課程枯燥無味的上課模式, 如此可增加自己的教學能量, 提升教師的教學價值。